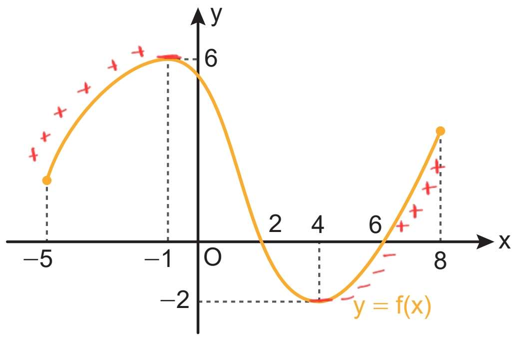
1. Aşağıda [–5, 8] aralığında tanımlı f fonksiyonun grafiği verilmiştir.



Buna göre, aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. **f fonksiyonunun artan olduğu aralıkları bulunuz.**

$[-5,-1] \cup [4,8]$

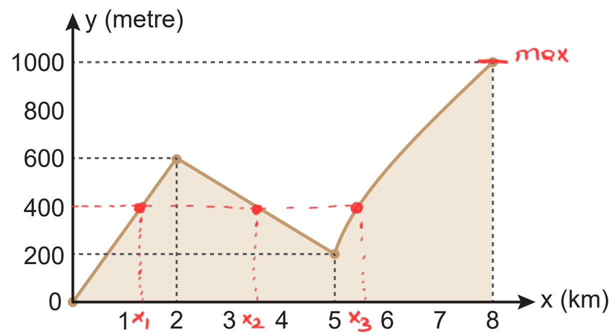
b. **f fonksiyonunun azalan olduğu aralığı bulunuz.**

$[-1,4]$

c. **f fonksiyonunun artan olup pozitif değer aldığı aralığı bulunuz.**

$[-5,-1] \cup (6,8]$

2. Bir dağcının tırmanış rotasındaki metre türünden yüksekliğinin yatayda aldığı km türünden yola bağlı değişimi y = f(x) fonksiyonu ile [0, 8] kapalı aralığında modellenmiştir. Deniz seviyesinde yürüyüşe başlayan dağcının izlediği rota ve deniz seviyesinden yükseliği aşağıdaki grafikte verilmiştir.



Buna göre, aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

a. **Dağcının tırmanış rotası boyunca deniz seviyesinden yüksekliğinin azaldığı mesafe aralığını yazınız. Bu iniş süresince dağcı toplam kaç metre aşağı inmiştir?**

$[2,5]$ aralığında yükseklik azalmış.

$600-200=400$ m inmiş

b. **Dağcının deniz seviyesinden yükseliğinin 400 metre olduğu birbirinden farklı x_1, x_2 ve x_3 konumlarını küçükten büyüğe doğru sıralayarak bu konumların artan veya azalan bölgelerden hangisine denk geldiğini belirtiniz.**

Artan → $[0,2] \cup [5,8]$

Azalan → $[2,5]$

$x_1 < x_2 < x_3$
$x_1 \in [0,2]$ → artan
$x_2 \in [2,5]$ → azalan
$x_3 \in [5,8]$ → artan

c. **Dağcının rotasındaki maksimum noktasının koordinatlarını belirleyip nedenini açıklayınız.**

Maksimum nokta (8,1000) noktası

Deniz seviyesinden yüksekliğin en fazla olduğu nokta. (1000 m)

3. Gerçek sayılarda tanımlı $g(x) = -2(x-3)^2 + 7$ fonksiyonu veriliyor.

$x=0 \quad y=-11 \quad (0,-11)$

Buna göre, g(x) ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. **İşaretlerini belirleyiniz.**

Pozitif $\rightarrow \left(3-\sqrt{\frac{7}{2}},\ 3+\sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

Negatif $\rightarrow \left(-\infty, 3-\sqrt{\frac{7}{2}}\right) \cup \left(3+\sqrt{\frac{7}{2}}, \infty\right)$

b. **Maksimum noktasının koordinatlarını bulunuz.**

$g(x) = -2(\underbrace{x-3}_{r})^2 + \underbrace{7}_{k}$

maksimum nokta $\rightarrow (3,7)$

c. **Bire bir ve örtenliğini inceleyiniz.**

Fonksiyon bire bir ve örten değil.
(yatay doğru testi)

d. **Sıfırlarını bulunuz.**

$-2(x-3)^2 + 7 = 0$

$2(x-3)^2 = 7$

$\sqrt{(x-3)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} \Rightarrow |x-3| = \sqrt{\frac{7}{2}}$

$x-3 = \sqrt{\frac{7}{2}} \qquad x-3 = -\sqrt{\frac{7}{2}}$

$\boxed{x = 3+\sqrt{\frac{7}{2}}} \qquad \boxed{x = 3-\sqrt{\frac{7}{2}}}$

4. m bir gerçek sayı ve g karesel fonksiyonunun cebirsel temsili

$$g(x) = -2x^2 + 8x - 5$$

Tanım aralığı: $m - 1 \le x \le m + 1$

olarak veriliyor.

Buna göre

a. **Fonksiyonun simetri eksenini bulunuz.**

$r = \dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-8}{2\cdot(-2)} = \dfrac{-8}{-4} = 2$

$x = 2$

b. **m'nin hangi değeri için görüntü kümesi maksimum değeri içerir? Sebebiyle açıklayınız.**

$[m-1, m+1]$ aralığının ortası m noktasıdır.
maksimum değerin bu aralıkta kalması için $m=r$ olmalı.
$m=2$ olduğunda tanım kümesi $[1,3]$ olur.
Bu aralıkta fonksiyon maksimum değeri içerir.
$1 \le m \le 3$ olur. Tepe noktasını en iyi şekilde kapsayan m değeri 2'dir.

c. **m = 0 için görüntü kümesini bulunuz.**

$-1 \le x \le 1$

$x=-1 \quad g(-1) = -2\cdot(-1-2)^2 + 3 = -15$

$x=1 \quad g(1) = -2\cdot(1-2)^2 + 3 = 1$

$G.K = [-15, 1]$

d. **m = 3 için görüntü kümesini bulunuz.**

$2 \le x \le 4$

$x=2 \quad g(2) = -2(2-2)^2 + 3 = 3$

$x=4 \quad g(4) = -2(4-2)^2 + 3 = -5$

$G.K = [-5, 3]$

5. Bir şirketin günlük kârı, üretilen ürün sayısına (x) bağlı olarak:

$$K(x) = (-0.5x^2 + 60x - 500) \text{ TL}$$

şeklinde modellenmiştir. Ancak şirket, üretim kapasitesi nedeniyle $20 \leq x \leq 70$ aralığında çalışmaktadır.

Buna göre, kâr fonksiyonu K olmak üzere,

a. Kâr fonksiyonunun tepe noktasını bulunuz.

$T(r,k) \rightarrow r = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{2(-0{,}5)} = 60$

$k = K(60) = -\frac{5}{1\cancel{0}} \cdot 360\cancel{0} + 3600 - 500$

$= -1800 + 3600 - 500$

$= 1300$

$T(60, 1300)$

b. Bu tepe noktası üretim aralığı içinde midir?

$x = 60 \qquad 20 \leq 60 \leq 70$

$\downarrow$

Evet aralıkta

c. Şirketin maksimum kârının kaç TL olduğunu ve üretilen kaç tane ürün ile elde edileceğini bulunuz.

60 tane ürün ile maksimum kar 1300TL

$\downarrow$

k

d. Eğer kapasite $10 \leq x \leq 50$ olsaydı maksimum kâr değişir miydi? Hesaplayarak açıklayınız.

r simetri ekseni aralıkta olmadığı için değişirdi.

$x = 50$ için

$Kar_{max} = -\frac{5}{1\cancel{0}} \cdot 250\cancel{0} + 3000 - 500$

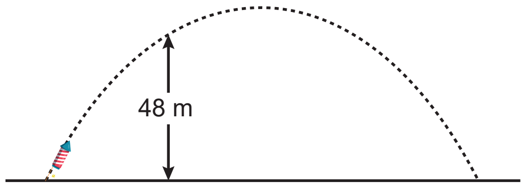
$= -1250 + 3000 - 500$

$= 1250$ TL

6. Bir havai fişek roketi, dikey olarak fırlatıldıktan sonra yerden yüksekliği(metre), zamana(saniye) bağlı olarak

$$h(t) = -\frac{1}{4}(t - r)^2 + 64$$

karesel fonksiyonu ile modellenmiştir.



Roket fırlatıldıktan 2 saniye sonra zeminden 48 metre yüksekliğe çıkmıştır.

Buna göre roket, fırlatıldığı andan yere ilk defa çarptığı ana kadar toplam kaç saniye havada kalmıştır?

$t = 2 \qquad h(2) = -\frac{1}{4}(2-r)^2 + 64$

$48 - 64 = -\frac{1}{4}(2-r)^2$

$-16 = -\frac{1}{4}(2-r)^2$

$64 = (2-r)^2$

$2-r = 8 \lor 2-r = -8$

$r = -6 \qquad \boxed{r = 10}$

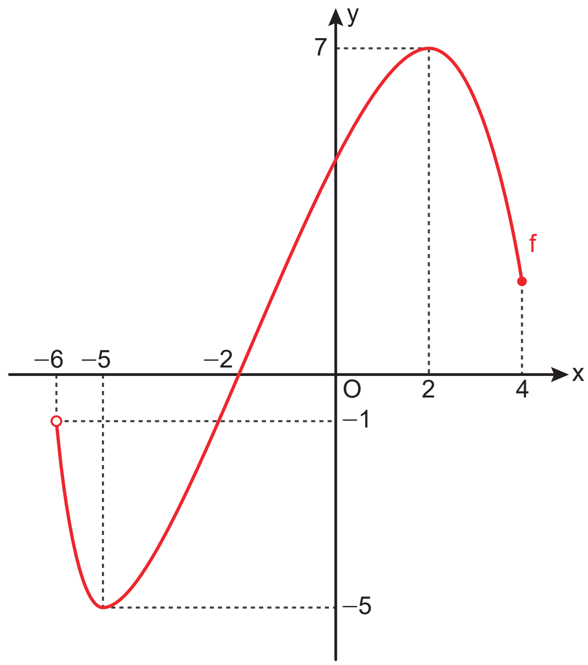
$h(t) = -\frac{1}{4}(t-10)^2 + 64 = 0 \Rightarrow (t-10)^2 = 256$

$t-10 = 16 \lor \cancel{t-10 = -16}$

$t = 26$

7. **Aşağıda grafikleri verilen fonksiyonların tanım kümesi, görüntü kümesi, sıfırları, pozitif ve negatif olduğu aralıkları, azalan ve artan olduğu aralıkları, örten olduğu aralığı, maksimum ve minimum noktalarını bulup bire bir olup olmadıklarını yazınız.**

a.



Tanım Kümesi = (−6,4]

Görüntü Kümesi = [−5,7]

Sıfırları = x = −2

Pozitif Olduğu Aralık = (−2,4]

Negatif Olduğu Aralık = (−6,−2)

Artan Olduğu Aralık = [−5,2]

Azalan Olduğu Aralık = (−6,−5] ∪ [2,4]

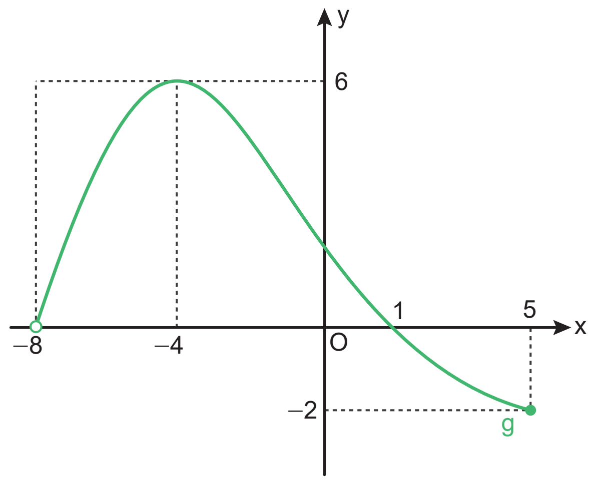
Maksimum Noktaları = (2,7)

Minimum Noktaları = (−5,−5)

Bire Bir Olma Durumu = Bire bir değil

Örten Olduğu Aralık = Tanımlı olduğu aralıkta örten

b.



Tanım Kümesi = (−8,5]

Görüntü Kümesi = [−2,6]

Sıfırları = x = 1

Pozitif Olduğu Aralık = (−8,1)

Negatif Olduğu Aralık = (1,5]

Artan Olduğu Aralık = (−8,−4]

Azalan Olduğu Aralık = [−4,5]

Maksimum Noktaları = (−4,6)

Minimum Noktaları = (5,−2)

Bire Bir Olma Durumu = Birebir değil

Örten Olduğu Aralık = Tanımlı olduğu aralıkta örten

8. Bir okul Çanakkale'ye yapacağı gezi için bir tur şirketi ile 25 kişilik bir otobüs için anlaşmıştır.

Anlaşma Koşulları aşağıdaki gibidir.

- Geziye katılan öğrenci sayısı en az 15 kişi olacaktır.
- Katılımın en az olması durumunda geziye katılan her bir öğrenciden 135 TL alınacaktır.
- 15'in üzerindeki her bir katılım için öğrencilerin her birinin ödeyeceği ücret 135 TL'den 5 TL daha az olacaktır.

Anlaşma koşullarına göre, tur şirketinin bu geziden elde edeceği gelir en çok kaç lira olur?

15 kişi üzeri x kişi olsun.

Toplam öğrenci : 15+x

Kişi başı ücret : 135−5x

$g(x) = (15+x).(135-5x)$

$= 2025 - 75x + 135x - 5x^2$

$= -5x^2 + 60x + 2025$

$r = \frac{-b}{2a} = \frac{-60}{-10} = 6 \rightarrow x = 6$ $g(6) = 21.105$

$= 2205$ TL

9. f: [2, 18] → ℝ olmak üzere cebirsel temsili

$f(x) = \sqrt{x-2} - 3$

olarak verilen karekök fonksiyonun tanımlı olduğu aralıkta

- Görüntü kümesini
- Maksimum - minimum noktasını ve değerini

bulunuz.

x = 2 için $f(2) = \sqrt{2-2} - 3 = -3$

x = 18 için $f(18) = \sqrt{18-2} - 3$

$= \sqrt{16} - 3$

$= 4 - 3 = 1$

G.K = [−3, 1]

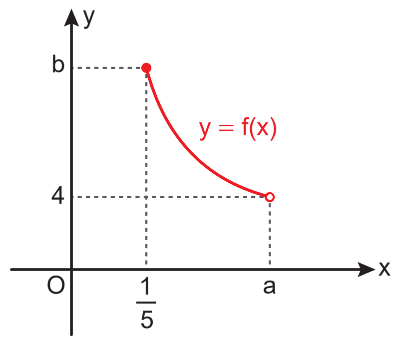
Minimum Nokta (2, −3)

Minimum Değer = −3

Maksimum nokta = (18, 1)

Maksimum Değer = 1

10. f: $\left[\frac{1}{5}, a\right) \rightarrow [4, b]$ olmak üzere $f(x) = \frac{1}{x} + 3$ fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir.



Buna göre, [a, b] aralığında tanımlı $g(x) = \frac{1}{x} - 3$ fonksiyonunun maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.

$f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{\frac{1}{5}} + 3 = b$

$5 + 3 = b$

$\boxed{b = 8}$

$f(a) = \frac{1}{a} + 3 = 4$

$\frac{1}{a} = 1$

$\boxed{a = 1}$

$g(x) = \frac{1}{x} - 3$

T.K = [1, 8]

g(x) bu aralıkta azalan

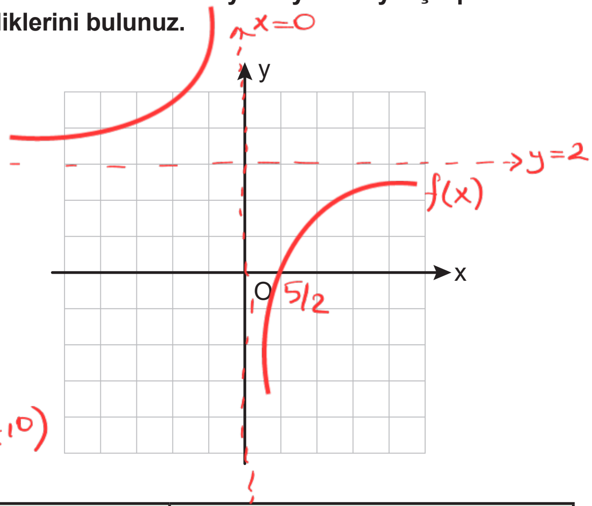
Max. Değer → $g(1) = \frac{1}{1} - 3 = -2$

Min. Değer → $g(8) = \frac{1}{8} - 3 = -\frac{23}{8}$

11. f: $\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ olacak şekilde tanımlı

$$f(x) = -\frac{5}{x} + 2$$

fonksiyonunun grafiğini $f(x) = \frac{1}{x}$ şeklinde tanımlı rasyonel referans fonksiyonu yardımıyla çizip nitel özelliklerini bulunuz.



$-\frac{5}{x}+2=0$

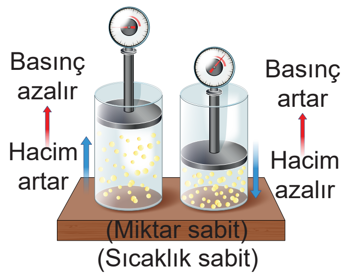
$2=\frac{5}{x}$

$2x=5$

$x=\frac{5}{2}$ $\left(\frac{5}{2},0\right)$

Nitel Özellikleri	Açıklama
Tanım Kümesi	$R-\{0\}$
Görüntü Kümesi	$R-\{2\}$
İşaretleri	Pozitif $\to (-\infty,0) \cup (\frac{5}{2},\infty)$ Negatif $\to (0,\frac{5}{2})$
Artanlığı - Azalanlığı	$R-\{0\}$ 'da artan
Maksimum - Minimum Noktaları	yok.
Sıfırları	$x=\frac{5}{2}$
Bire Birliği	Bire bir
Teklik - Çiftliği	Ne tek ne çift
Örtenliği	$R-\{2\}$ 'de örten

12. Sabit sıcaklıkta tutulan ideal bir gazın basıncı ile hacmi arasındaki ilişki Boyle Yasası ile açıklanır. Bu yasaya göre, gazın hacmi (V) ile basıncı (P) ters orantılıdır ve $P \cdot V = k$ (k sabit) şeklinde ifade edilir. Bu durumda basınç, hacmin bir fonksiyonu olarak $P = \frac{k}{V}$ formülü ile hesaplanır.



Boyle Yasası: $P \cdot V = k$

P: Gaz Basıncı (P_a)

V: Gaz Hacmi (m^3)

k: Sabit

$k = 40\ P_a \cdot m^3$

Hacim x metreküp ve basınç fonksiyonu P(x) olmak üzere

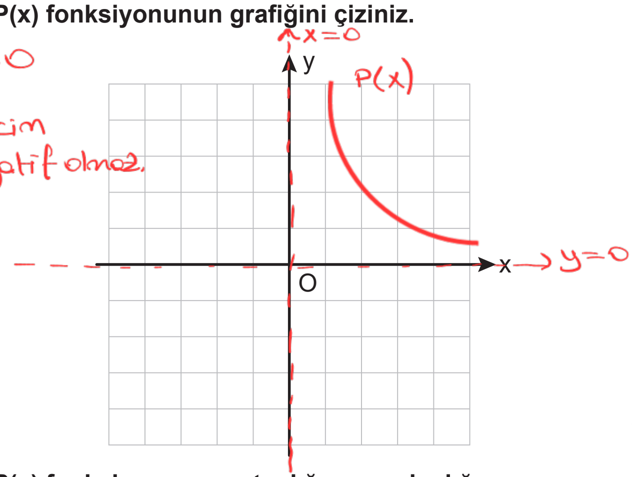
a. **P(x) fonksiyonunun cebirsel temsilini bulunuz.**

$P(x) = \frac{40}{x}$

b. **P(x) fonksiyonunun grafiğini çiziniz.**

$x>0$

Hacim negatif olmaz.



c. **P(x) fonksiyonunun artanlığını - azalanlığını belirleyiniz.**

$(0,\infty) \to$ Azalan

d. **P(x) fonksiyonunun bire birliğini araştırınız.**

Bire bir (Yatay doğru testi)

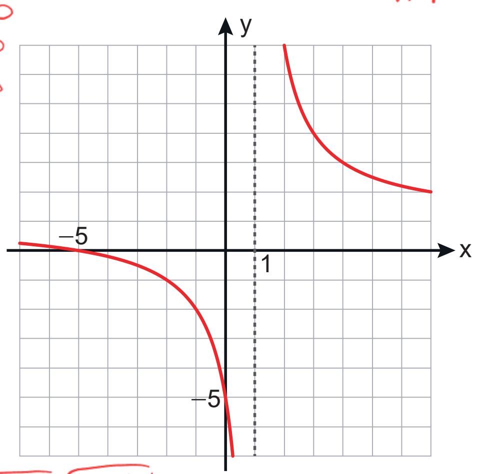
e. **$1 \le x \le 8$ aralığında gaz basıncının maksimum ve minimum değerlerini bulunuz.**

$x=1$ $P(1)=\frac{40}{1}=40 \to$ max

$x=8$ $P(8)=\frac{40}{8}=5 \to$ min

13. Aşağıda grafiği verilen $a \cdot \dfrac{1}{x+r} + k$ biçimindeki g fonksiyonunun tanım kümesini, değer kümesini ve cebirsel temsilini yazınız.

$g(x) = \dfrac{6}{x-1} + 1$



$x=1$ için $x+r=0$

$1+r=0$

$\boxed{r=-1}$

$x=-5 \quad g(-5)=0$

$\dfrac{a}{-6}+k=0$

$\dfrac{a}{-6}=-k$

$\boxed{a=6k}$

$x=0 \quad g(0)=-5$

$\dfrac{a}{-1}+k=-5$

$-a+k=-5$

$-6k+k=-5$

$-5k=-5 \rightarrow \boxed{k=1} \quad \boxed{a=6}$

Tanım Kümesi: $\mathbb{R}-\{1\}$

Değer Kümesi: $\mathbb{R}-\{1\}$

Cebirsel Temsil: $g(x)=\dfrac{6}{x-1}+1$

14. f: $\mathbb{R} - \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ olacak şekilde tanımlı f fonksiyonu

$$f(x) = -\frac{2}{x-3} + 5$$

olarak veriliyor.

Buna göre, f fonksiyonunun

- Görüntü kümesini
- Sıfırlarını (varsa)
- Artan - azalan olduğu aralıkları

sırasıyla bulunuz.

$x \neq 3 \quad y \neq 5$

$-\dfrac{2}{x-3}+5=0$

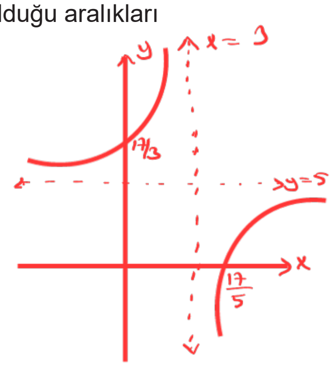
$\dfrac{2}{x-3}=5$

$5x-15=2$

$5x=17$

$\boxed{x=\dfrac{17}{5}} \rightarrow$ sıfırları

$x=0 \quad y=\dfrac{2}{3}+5=\dfrac{17}{3}$



G.K $= \mathbb{R}-\{5\}$

Artan $\rightarrow \mathbb{R}-\{3\}$

15. f: $\mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{1}{x}$ rasyonel referans fonksiyonuna aşağıdaki dönüşümler sırasıyla uygulanarak $y = g(x)$ fonksiyonu elde edilecektir.

- Referans fonksiyonun 2 katına eşleniyor.
- x ekseninin pozitif yönünde 5 birim öteleniyor.
- y ekseninin pozitif yönünde 3 birim ötelenmiştir.

Buna göre, elde edilen g fonksiyonun cebirsel temsilini ve sıfırını bulunuz.

$g(x) = 2f(x-5)+3$

$= \dfrac{2}{x-5}+3$

$g(x)=0 \Rightarrow \dfrac{2}{x-5}+3=0$

$\dfrac{2}{x-5}=-3$

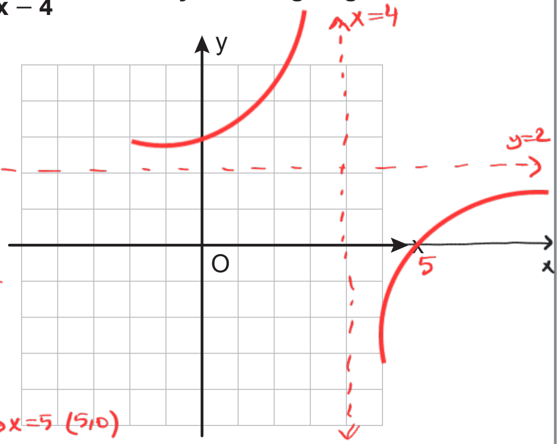
$-3x+15=2$

$3x=13$

$x=\dfrac{13}{3}$

16. f: A → ℝ, $f(x) = -\dfrac{2}{x-4} + 2$ şeklinde tanımlı f fonksiyonunun grafiğini çizip nitel özellikleri ile ilgili tablodaki boş kısımları doldurunuz.

a. **$f(x) = -\dfrac{2}{x-4} + 2$ fonksiyonunun grafiği**



$x=0 \quad y = \frac{-2}{-4} + 2 = \frac{1}{2} + 2 = \frac{5}{2}$

$y=0 \quad -\frac{2}{x-4} + 2 = 0$

$\frac{2}{x-4} = 2$

$x-4 = 1 \rightarrow x = 5 \quad (5,0)$

b. **Nitel özellikleri**

Nitel Özellikleri	Açıklama
Tanım Kümesi	$\mathbb{R} - \{4\}$
Görüntü Kümesi	$\mathbb{R} - \{2\}$
İşaretleri	Pozitif $\rightarrow (-\infty,4) \cup (5,\infty)$ Negatif $\rightarrow (4,5)$
Artanlığı - Azalanlığı	Artan $\rightarrow (-\infty,4) \cup (4,\infty)$
Maksimum - Minimum Noktaları	Yok.
Sıfırları	$x = 5$
Bire Birliği	Bire bir
Teklik - Çiftliği	Ne tek ne çift
Örtenliği	$\mathbb{R} - \{2\}$ 'de örten

17. Cebirsel temsili

$$f(x) = x^2 - 6x + 10$$

olan f fonksiyonu veriliyor.

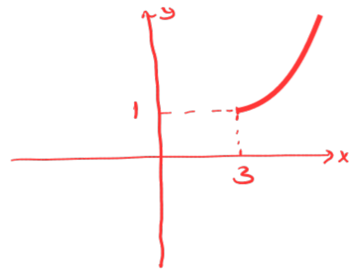
$r = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{2} = 3$

$k = 9 - 18 + 10 = 1$

$T(3,1)$

Buna göre,

a. **Bu fonksiyonun bire bir olabilmesi için uygun bir tanım kümesi belirleyiniz.**



$T.K = [3,\infty)$

b. **Seçtiğiniz tanım kümesine göre fonksiyonun görüntü kümesini bulunuz.**

$G.K = [1,\infty)$

c. **Fonksiyonun tersinin cebirsel ifadesini yazınız.**

$\underbrace{f(x)}_{y} = (x-3)^2 + 1$

$y - 1 = (x-3)^2$

$\sqrt{y-1} = |x-3| \quad (x \geq 3)$

$\sqrt{y-1} = x - 3$

$x = \sqrt{y-1} + 3$

$\boxed{f^{-1}(x) = \sqrt{x-1} + 3}$

d. **f^{-1} fonksiyonunun tanım ve görüntü kümelerini belirtiniz.**

$x - 1 \geq 0$

$x \geq 1$

$T.K = [1,\infty)$

$x = 1 \quad y = 3 \quad G.K = [3,\infty)$

18. g: [a, ∞) → [5, ∞) olmak üzere,

$g(x) = \sqrt{x+7} - b$

şeklinde tanımlanan g fonksiyonu bire bir ve örtendir.

Buna göre, a + b toplamının değerini bulunuz.

$x+7 \geq 0$

$x \geq -7 \Rightarrow \boxed{a=-7}$

$x=-7$ için en küçük değeri alır.

$\sqrt{\underbrace{-7+7}_{0}} - b = 5$

$\boxed{b=-5}$

$a+b = -7-5 = -12$

19. f: A → B olmak üzere,

$f(x) = 2\sqrt{x-3} + 6$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu bire bir ve örten olduğuna göre $f^{-1}(x)$ ile ilgili aşağıdaki soruları cevaplayınız.

a. **$f^{-1}(x)$'in en geniş tanım ve görüntü kümesini bulunuz.**

$x-3 \geq 0$
$x \geq 3$ } f'nin T.K $[3, \infty)$

$x=3$ $y=6 \rightarrow min$

$G.K = [6, \infty)$

$f^{-1}(x)$'in

$T.K = [6, \infty)$

$G.K = [3, \infty)$

b. **Maksimum - minimum noktası ve değerlerini bulunuz.**

$y = 2\sqrt{x-3} + 6$

$y-6 = 2\sqrt{x-3}$

$\frac{y-6}{2} = \sqrt{x-3}$

$\left(\frac{y-6}{2}\right)^2 = x-3$

$\left(\frac{y-6}{2}\right) + 3 = x$

$f^{-1}(x) = \left(\frac{x-6}{2}\right)^2 + 3$

min. Nokta $\rightarrow (6,3)$

min. Değer $= 3$

max. Değer yok.

c. **$f^{-1}(8) + f(12)$ toplamının değerini bulunuz.**

$f^{-1}(8) = \left(\frac{8-6}{2}\right)^2 + 3 = 1+3 = 4$

$f(12) = 2\sqrt{12-3} + 6 = 2.3+6$
$= 12$

$4+12 = 16$